

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(экзаменационные вопросы второго семестра, первый поток)

1. Определение линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Обратный оператор. Проекторы.
2. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентность и подобие матриц. Критерий эквивалентности матриц. Произведение линейных операторов и его матрица.
3. Характеристический многочлен линейного оператора. Определитель и след. Многочлен от оператора. Аннулирующие многочлены. Минимальный многочлен. Теорема Кэли–Гамильтона.
4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Собственное подпространство линейного оператора. Геометрическая и алгебраическая кратности собственного значения. Диагонализуемые операторы (операторы простой структуры).
5. Инвариантные подпространства. Сужение оператора (индуцированный оператор). Прямая сумма операторов. Инвариантность ядра и образа многочленов от оператора. Корневое разложение линейного оператора.
6. Нильпотентные операторы и их собственные значения. Разложение линейного оператора в прямую сумму нильпотентного и обратимого операторов.
7. Минимальные инвариантные пространства, содержащие заданный вектор. Пространства Крылова. Нерасщепляемость инвариантных пространств Крылова для нильпотентного оператора.
8. Разложение нильпотентного оператора в прямую сумму операторов на инвариантных пространствах Крылова.
9. Жорданова форма комплексной матрицы. Критерий подобия матриц.
10. Блочная жорданова форма вещественной матрицы.
11. Метрическое пространство. Сходящиеся и фундаментальные последовательности. Полнота. Ограниченные, замкнутые, компактные множества.
12. Нормированное пространство. Нормы Гельдера. Неравенства Гельдера и Минковского.
13. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Компактность замкнутого ограниченного множества в конечномерном пространстве. Некомпактность единичной сферы в бесконечномерном пространстве.
14. Задача о наилучшем приближении на конечномерном подпространстве нормированного пространства.
15. Скалярное произведение в вещественном и комплексном пространствах. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Угол между векторами в евклидовом пространстве. Теорема Пифагора.
16. Длина вектора и тождество параллелограмма.
17. Матрица Грама и общий вид скалярного произведения в конечномерном пространстве.
18. Ортонормированные базисы и унитарные матрицы. Ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR -разложение матрицы. Ортогональные многочлены и трехчленные рекуррентные соотношения.
19. Задача о наилучшем приближении на выпуклом замкнутом множестве в конечномерном евклидовом пространстве. Разделяющая гиперплоскость.
20. Бариецентрические и выпуклые комбинации векторов. Аффинные и выпуклые оболочки множеств. Выпуклые многогранники, симплексы, полиэдры. Замкнутость конечнопорожденного конуса. Аффинные (линейные) неравенства и теорема Фаркаша.
21. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма линейного оператора. Непрерывные линейные функционалы и скалярное произведение (теорема Рисса).

22. Сопряженный оператор. Существование и единственность. Матрица сопряженного оператора.
23. Теорема Шура. Нормальные, унитарные, эрмитовы операторы и матрицы и их спектральные разложения.
24. Эрмитово разложение. Знакоопределенные операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.
25. Блочная жорданова форма вещественной нормальной матрицы и ортогональной матрицы.
26. Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы. Сингулярное и полярное разложения.
27. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора (матрицы). Альтернатива Фредгольма.
28. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы. Спектральная норма. Спектральный радиус и нормы.
29. Сингулярное разложение матрицы и обобщенные решения линейных систем. Нормальное псевдорешение. Псевдообратная матрица.
30. Сингулярное разложение матрицы и ее приближения матрицами меньшего ранга.
31. Теорема Куранта–Фишера о собственных значениях эрмитовой матрицы. Соотношения разделения для эрмитовых матриц и их ведущих подматриц. Соотношения разделения для сингулярных чисел произвольной матрицы и ее подматриц, составленных из части столбцов (строк).
32. Положительно (неотрицательно) определенные матрицы. Критерии положительной и неотрицательной определенности эрмитовой матрицы.
33. Билинейные и полутаролинейные формы. Квадратичные формы. Приведение к алгебраической сумме квадратов, приведение к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность. Закон инерции квадратичных форм.
34. Представление обратной матрицы рядом Неймана. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Неймана. Число обусловленности невырожденной матрицы. Матрицы с диагональным преобладанием и круги Гершгорина.